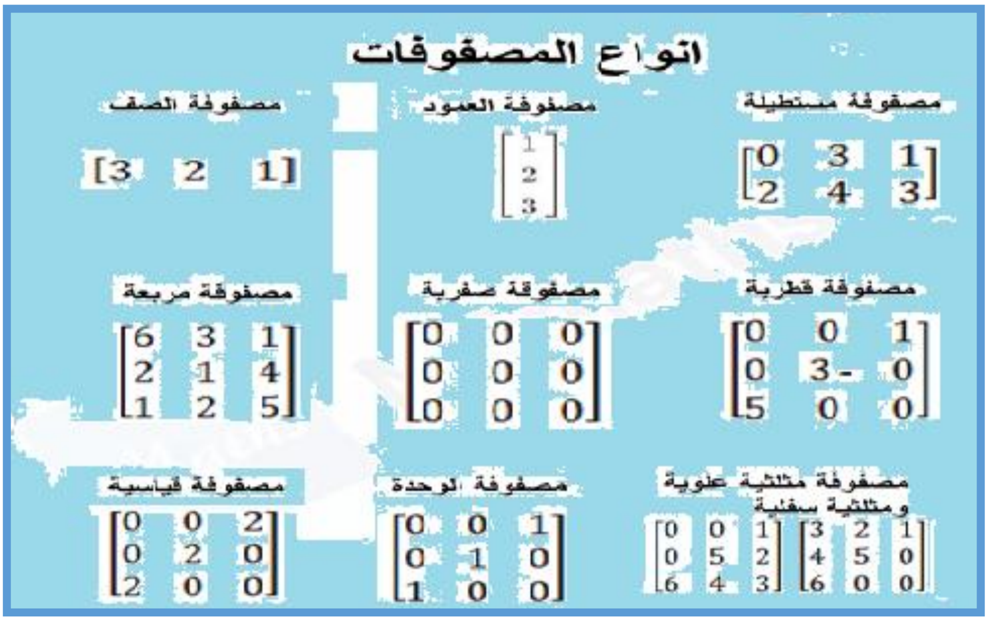
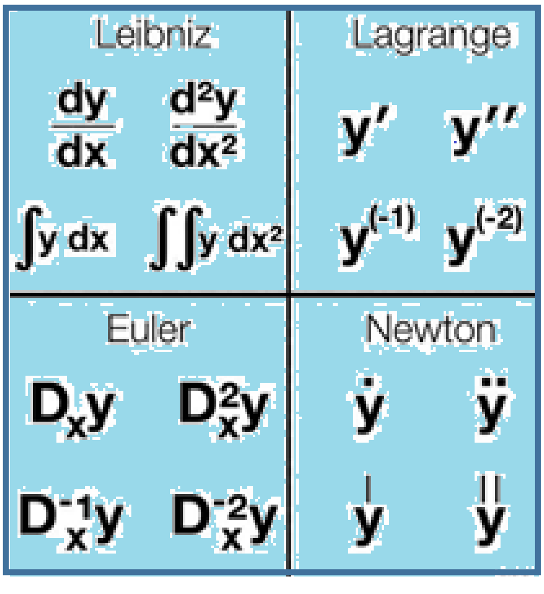
الرياضيات للصف الثالث الثانوي



المنهج المقرر للعام الدراسي 2025-2026

المذكرة الأولي : المصفوفات والمحددات



العام الدراسي : 2025 - 2026

أ . حـسـين شـعـث

المصفوفات Matrices

المصفوفة :-

هي أداة رياضية تستخدم للتعبير عن البيانات بطريقة منسقة ويستخدم لها احدى الأقواس [ ] أ، ( )

وتعتبر المصفوفات من الدعامات الأساسية في دراسة البرامج الخطية

فمثلا $\begin{bmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{bmatrix}$

الصف الأول ← الصف الأول: أ ب ج

الصف الثاني ← الصف الثاني: س ص ع

العمود الأول: أ س — العمود الثاني: ب ص — العمود الثالث: ج ع

الصورة العامة للمصفوفة :

$$\text{ف} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{1ن} & \cdots\cdots & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{2ن} & \cdots\cdots & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{م ن} & \cdots\cdots & \text{أ}_{2م} & \text{أ}_{1م} \end{bmatrix}$$

أ_{21} : الصف الأول العمود الثاني أ_{53} : الصف الثالث العمود الخامس

مثال :

المصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\text{أ}_{11} = 1$ ، $\text{أ}_{13} = 5$ ، $\text{أ}_{32} = 2$ ، $\text{أ}_{31} = 6$

رتبة المصفوفة أو نوع المصفوفة :-

تعرف رتبة المصفوفة عن طريق ضرب عدد الصفوف في عدد الأعمدة

فمثلاً

$\begin{bmatrix} 10 & 1- & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ من نوع

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ من نوع 4×1

$\begin{bmatrix} 1- & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ من نوع 2×2

$\begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$ من نوع 1×1

$\begin{bmatrix} 5 & 1- & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1- & 2 \end{bmatrix}$ من نوع 3×3

تمرين :

أوجد رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{ء} & \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \end{bmatrix}$

<u>المفاهيم الأساسية :-</u>

1 – المصفوفة الحقيقية (Real Matrix) :

هي مصفوفة عناصرها أعداداً حقيقية .

2 – المصفوفة المربعة (Square Matrix) :

يقال عن المصفوفة بأنها مربعة إذا كان بها عدد الصفوف مساوياً لعدد الأعمدة

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة لأن عدد صفوفها = عدد أعمدتها = 2

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة من نوع 3×3

القطر الرئيسي — القطر الفرعي

للمصفوفة المربعة قطران أحدهما رئيسي والآخر فرعي .

3 – مصفوفة الصف :

إذا كانت المصفوفة تحتوي صف واحد وعدد من الأعمدة م = 1

مثل : $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ من نوع 1 × 4

الصيغة العامة لها: $ف_1 = [\,أ_{ر ي}\,]$ (حيث: ر = 1 ، ي = 1 ، 2 ، ... ، ن)

4 – مصفوفة عمود :

إذا كانت المصفوفة تحتوي عمود واحد وعدد من الصفوف ن = 1

مثل : $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ من نوع 4 × 1

الصيغة العامة لها: $ف = [\,أ_{ر ي}\,]$ (حيث: ر = 1 ، 2، ... ، ي = 1)

5 – المصفوفة ليس لها قيمة عددية ولكنها مجرد طريقة لعرض البيانات .

6 – المصفوفة الصفرية (Zero Matrix) :

هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار وهى المصفوفة المحايدة في عملية الجمع

مثل : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ نوع 3×2 ، أ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ نوع 2×3 ، أ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ نوع 3×3 ، أ $[0]$ نوع 1×1

الصيغة العامة لها: $\underline{0} = [\,أ_{ر ى}\,]$ حيث: $\underline{0} = \begin{cases} 0 & \text{عندما } ر = ى \\ 0 & \text{عندما } ر \neq ى \end{cases}$

7 – المصفوفة القطرية (Diagnoal Matrix) :

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي .

فمثلاً

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسي 1 ، - 3 ، 5 وباقي العناصر أصفار.

أي ان :

ف = $[\,أ_{ر ى}\,]_{ن \times ن}$ تسمى مصفوفة قطرية إذا كان $أ_{ر ى} = 0$ لما $ر \neq ى$

مثال :

إذا كانت $\begin{bmatrix} 7 & 20 - 2س \\ 3 - 6ص & 15 \end{bmatrix}$ مصفوفه قطرية أوجد س + 2 ص

الحل :

$\because$ 20 – 2س = 0 ← س = 10

, 3 – 6 ص = 0 ← ص = $\frac{1}{2}$

$\therefore$ س + 2 ص = 10 + 2 × $\frac{1}{2}$ = 11

8 – مصفوفة الوحدة (Identity Matrix) :

هي مصفوفة قطرية يكون فيها جميع عناصر القطر الرئيسي 1 وهى المصفوفة المحايدة في عملية الضرب ويرمز لها بالرمز I والصيغة العامة لها :

الصيغة العامة لها: $I = [\,أ_{رء}\,]$ حيث: $I = \begin{cases} 1 & \text{عندما } ر = ء \\ 0 & \text{عندما } ر \neq ء \end{cases}$

فمثلاً

$I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

مصفوفة الوحدة حيث عناصر القطر الرئيسي الواحد وباقي العناصر أصفار

9 – تساوي مصفوفتين (Equality of Matrices) :

تتساوي المصفوفتان إذا كانتا من نفس الرتبة وعناصرها المتناظرة متساوية فمثلاً

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ لأنها ليست من نفس النوع

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ لأن العناصر المتناظرة غير متساوية

(3) $\begin{bmatrix} (5)^3 & (3)^2 - 1 \\ (-6)^2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 & 8 \\ 36 & 7 \end{bmatrix}$ من نفس النوع والعناصر المتناظرة متساوية

مثال (1) :

أوجد س ، ص ، ع ، ل التي تجعل : $\begin{bmatrix} ص & 4 \\ 5 & 2ل \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3ع & ص + 1 \\ س + 1 & -6 \end{bmatrix}$

الحل :

س + 1 = 5 ⟵ **س = 4**   ص + 1 = 4 ⟵ **ص = 3**

ص = 3 ع ⟵ (حيث ص = 3) **ع = 1**   2 ل = - 6 ⟵ **ل = -3**

س = 4 ، ص = 3 ، ع = 1 ، ل = - 3

مثال (2) :

إذا كانت $\begin{bmatrix} س & 4 \\ ص & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & ع \end{bmatrix}$ **فبين نوع المصفوفة** $\begin{bmatrix} س & ص \\ ع & 0 \end{bmatrix}$

الحل :

$\begin{bmatrix} س & 4 \\ ص & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & ع \end{bmatrix}$

وعليه س = 0

ص = 3

ع = -1

وبذلك $\begin{bmatrix} س & ص \\ ع & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ وهي مصفوفة قطرية

10 – المصفوفة المثلثية العلوية (Upper Triangular Matrix):

هي مصفوفة مربعة بها مثلث صفري أسفل القطر الرئيسي مثل :

$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

القطر الرئيسى

11– المصفوفة المثلثية السفلية (Lower Triangular Matrix):

هي مصفوفة مربعة بها مثلث صفري أعلى القطر الرئيسي مثل :

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

القطر الرئيسى

العمليات على المصفوفات :-

جمع وطرح المصفوفات :-

يشترط لجمع أو طرح أي مصفوفتين أن تكونا من نفس النوع حيث تجمع أو تطرح العناصر المتناظرة .

فمثلاً $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 7- \\ 1 & 10 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 10- \\ 9 & 10 & 5- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1- & 3 \\ 8- & 0 & 7 \end{bmatrix}$

$8 = 3 + 5$ ، $0 = 1+(1-)$ ، $7- = (10-)+3$

$1 = 9 + (8-)$ ، $10 = 10 + 0$ ، $2 = (5-) +7$

المعكوس الجمعي للمصفوفات :-

المعكوس الجمعي للمصفوفة هو تغير إشارات جميع عناصر هذه المصفوفة

فمثلاً : المعكوس الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 1- & 3 \\ 1- & 0 & 0 \end{bmatrix}$ هو $\begin{bmatrix} 2- & 1 & 3- \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

أي أن :

إذا كان أ ، ب مصفوفتان معرفة عليهما عملية الجمع وكان أ + ب = صفر
فإن ب تسمى المعكوس الجمعي للمصفوفة أ حيث ب = -أ

مثال :

إذا كانت س + $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1- & 1 \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة س

الحل :

س = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1- & 1 \end{bmatrix}$ - $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2- \end{bmatrix}$

س = $\begin{bmatrix} 2 & 2- \\ 6- & 3 \end{bmatrix}$

" بإضافة معكوس المصفوفة للطرفين وهي - $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2- \end{bmatrix}$ "

" لاحظ ان س + $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ = س "

س + $\underline{O}$ = س

ملاحظة :

عملية جمع المصفوفات عملية تبديليه وتنسيقيه .

عملية ضرب المصفوفات :

(i) ضرب عدد حقيقي في مصفوفة:

عند ضرب أي مصفوفة في عدد حقيقي نضرب جميع عناصر المصفوفة في ذلك العدد .

مثال :

(1) $$3\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 6\\ 0 & 15\end{bmatrix}$$

(2) إذا كان $أ = \begin{bmatrix}6 & 8 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$ أوجد 3 أ ، $\frac{1}{2}$ م

الحل :

$$3\ أ = 3\begin{bmatrix}6 & 8 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18 & 24 & 3\\ 6 & 3 & 12\\ 3 & 6 & -6\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\ أ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 8 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 4 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & 2\\ \frac{1}{2} & 1 & -1\end{bmatrix}$$

(ii) ضرب مصفوفتين :-

الشرط اللازم لضرب مصفوفتين هو **عدد أعمدة المصفوفة اليمني = عدد صفوف المصفوفة اليسرى** .

فمثلاً : إذا ضربت مصفوفة من نوع **م** × **ن** في مصفوفة من نوع **ن** × هـ فشرط الضرب محقق وهو **ن** = **ن** والمصفوفة الناتجة من نوع **م** × هـ

مثال (1) :-

أوجد حاصل ضرب $\begin{bmatrix}5 & 3 & 2\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5 & -1 & 2\\ -4 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$

الحل :-

$$\begin{bmatrix}5 & 3 & 2\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5 & -1 & 2\\ -4 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}0\times 5+(-4)\times 3+5\times 2 & (-2)\times 5+3\times 3+(-1)\times 2 & 1\times 5+0\times 3+2\times 2\\ 0\times(-2)+(-4)\times(-1)+5\times 0 & (-2)\times(-2)+3\times(-1)+(-1)\times 0 & 1\times(-2)+0\times(-1)+2\times 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-2 & -3 & 9\\ 4 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

مثال (2):-

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ أوجد كلا من ﺃ × ب ، ب × ﺃ

الحل:-

ﺃ × ب = $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 3 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، ب × ﺃ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = [8]$

مثال (3) :-

إذا كان $\begin{bmatrix} \text{ﺃ} \\ \text{ب} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ أوجد قيمتى ﺃ ، ب

الحل:

$\begin{bmatrix} \text{ﺃ} \\ \text{ب} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4\text{ﺃ} & 3\text{ﺃ} \\ 4\text{ب} & 3\text{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

∴ 4ﺃ = -4 ﺃ = -1

∴ 4ب = 4 ب = 1

مثال (4) :-

إذا كان س $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ + ص $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ أوجد س ، ص

الحل:

$\begin{bmatrix} 3\text{س} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ص} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3\text{س} + \text{ص} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

من تساوي المصفوفتين نجد أن: ص = 0 ∴ 3 س + ص = 1

3 س + 0 = 1 ⟸ س = $\frac{1}{3}$

__تمرين :__

إذا كانت ﺃ = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ وكانت ﺃ جـ = 3 ب

فأوجد قيمة ($\frac{\text{ص}}{\text{س}} - \frac{\text{س}}{\text{ص}}$)

المحايد الضربي :-

هو مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي **واحد** وباقي عناصرها أصفار

فمثلاً

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة محايدة من الرتبة الثانية ويرمز لها بالرمز I_2

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة محايدة من الرتبة الثالثة ويرمز لها بالرمز I_3

ملاحظة :

عملية ضرب المصفوفات عملية غير تبديليه ولكنها تنسيقيه .

أي ان ﺃ ب ≠ ب ﺃ   ولكن   (ﺃ ب) جـ = ﺃ (ب جـ)

مسألة (1) :

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين على نفس النوع ... فأشرح لماذا ؟

(i) (أ + ب)^2 ≠ أ^2 + 2 أ ب + ب^2

الإثبات :

(أ + ب)^2 = أ^2 + أ ب + ب أ + ب^2

ولكن أ ب ≠ ب أ

∴ (أ + ب)^2 ≠ أ^2 + 2 أ ب + ب^2

(ii) (أ + ب)(أ – ب) ≠ أ^2 - ب^2

الإثبات :

(أ + ب)(أ – ب) = أ^2 - أ ب + ب أ - ب^2

ولكن أ ب ≠ ب أ

∴ (أ + ب)(أ – ب) ≠ أ^2 - ب^2

(iii) (أ ب)^2 = أ^2 ب^2 ⟺ أ ب = ب أ

الإثبات :

(أ ب)^2 = (أ ب)(أ ب)

= أ (ب أ) ب   خاصية التنسيق

= أ (أ ب) ب لان أ ب = ب أ

= (أ أ) (ب ب) خاصية التنسيق

(أ ب)^2 = أ^2 ب^2 ⟺ أ ب = ب أ

تمرين :

(1) إذا كان أ ب = O فإن أ = O ، أ ب = O

هل هذه العبارة صحيحة ام لا

(2) إذا كانت ﺃ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ فأثبت أن

ﺃ^{ن} = $2^{ن-1}$ ﺃ   حيث ن عدد صحيح موجب

☐ تمرين 1-ب

1- حل المعادلة 3 (س - $\begin{bmatrix}4&1\\5&0\end{bmatrix}$) = 2 س + $\begin{bmatrix}3&0\\2&-1\end{bmatrix}$

الحل :

3 س - 3 $\begin{bmatrix}4&1\\5&0\end{bmatrix}$ = 2 س + $\begin{bmatrix}3&0\\2&-1\end{bmatrix}$

3 س - $\begin{bmatrix}12&3\\15&0\end{bmatrix}$ = 2 س + $\begin{bmatrix}3&0\\2&-1\end{bmatrix}$

3 س - 2 س = $\begin{bmatrix}3&0\\2&-1\end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix}12&3\\15&0\end{bmatrix}$

س = $\begin{bmatrix}15&3\\17&-1\end{bmatrix}$

2- أوجد حاصل ضرب المصفوفات الآتية أن أمكن ذلك :

(أ)- $\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

(ب)- $\begin{bmatrix}-2&1\\6&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\4&1\end{bmatrix}$

(جـ)- $\begin{bmatrix}2&4\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\-1&-2&0\end{bmatrix}$

(ء)- $\begin{bmatrix}3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

(هـ)- $\begin{bmatrix}1&4&5\\-5&6&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&2\\1&7\end{bmatrix}$

الحل :

(أ) $[3] = [3\times1 + 2\times0] = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix}-5&0\\15&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8-3&2-2\\-24+9&-6+6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&2\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\6&-3\end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix}10&4&4\\0&-4&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-12&4-8&0+4\\3-3&6-2&0+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&2&1\\-1&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\3&1\end{bmatrix}$

(ء) $[14] = [3\times3 + 2\times2 + 1\times1] = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix}-3&2\\1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&5\\-5&6&2\end{bmatrix}$ لايمكن الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى ≠ عدد صفوف المصفوفة الثانية

-3 إذا كانت أ = $\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix}5 & 2-\\8- & 7\end{bmatrix}$

أوجد أ + ب ، أ − ب ثم أثبت أن (مع ذكر السبب) :

(i). (أ + ب)(أ − ب) $\neq$ أ^2 − ب^2 (ii). (أ + ب)^2 $\neq$ أ^2 + 2 أب + ب^2

(iii). (أب − ب أ)^2 مصفوفة قطرية ثم أوجد قيمة | (أب − ب أ)^2 |

الحل :

$$\text{أ + ب} = \begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & 2-\\8- & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 1-\\4- & 10\end{bmatrix}$$

$$\text{أ − ب} = \begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 2-\\8- & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3- & 3\\12 & 4-\end{bmatrix}$$

$$(i)\ \ (\text{أ + ب})(\text{أ − ب}) = \begin{bmatrix}7 & 1-\\4- & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3- & 3\\12 & 4-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}87 & 31-\\78- & 46\end{bmatrix} \longrightarrow (1)$$

$$\text{أ}^2 - \text{ب}^2 = \begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 2-\\8- & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 2-\\8- & 7\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}10 & 7\\22 & 15\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}50- & 39\\99 & 70-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}60 & 32-\\77- & 85\end{bmatrix} \longrightarrow (2)$$

من (1) ، (2) $\therefore$ (أ + ب)(أ − ب) $\neq$ أ^2 − ب^2

$$(ii)\ \ (\text{أ + ب})^2 = \begin{bmatrix}7 & 1-\\4- & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 1-\\4- & 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}35- & 71\\86 & 50-\end{bmatrix} \longrightarrow (1)$$

$$\text{أ}^2 + 2\,\text{أ ب} + \text{ب}^2 = \begin{bmatrix}10 & 7\\22 & 15\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 2-\\8- & 7\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}50- & 39\\99 & 70-\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}10 & 7\\22 & 15\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}22- & 24\\34- & 44\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}50- & 39\\99 & 70-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}51- & 58\\104 & 33-\end{bmatrix} \longrightarrow (2)$$

من (1) ، (2) $\therefore$ (أ + ب)^2 $\neq$ أ^2 + 2 أب + ب^2

$$(iii)\ \ (\text{أب − ب أ})^2 = \left(\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 2-\\8- & 7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 2-\\8- & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix}0 & 1052-\\1052- & 0\end{bmatrix}$$

$$\left|(\text{أب − ب أ})^2\right| = \left|\begin{bmatrix}0 & 1052-\\1052- & 0\end{bmatrix}\right| = 1106704$$

4- إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & 0 \end{bmatrix}$ وكانت ب^2 = أ فعين قيم ، س، ص، ع .

أوجد: 3أ – 2 ب.

الحل :

$\text{ب}^2 = \text{أ}$ أي ان $\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ أ، $\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \text{س ص + ص ع} & \text{س}^2 \\ \text{ع}^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{س}^2 = 1$ ⟵ س = ± 1

$\text{ع}^2 = 1$ ⟵ ع = ± 1

س ص + ص ع = 1

عندما س = 1 ، ع = 1 فإن 2 ص = 1 ⟵ ص = $\frac{1}{2}$

عندما س = -1 ، ع = -1 فإن -2 ص = 1 ⟵ ص = $\frac{-1}{2}$

عندما س = 1 ، ع = -1 فإن ص - ص = 1 ⟵ لايوجد حل

عندما س = -1 ، ع = 1 فإن - ص + ص = 1 ⟵ لايوجد حل

س = ± 1 ، ع = ± 1 ، ص = ± $\frac{1}{2}$

3 أ - 2 ب = 3 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2\text{ص} & 3-2\text{س} \\ 3-2\text{ع} & 0 \end{bmatrix}$

5- إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{ب}- & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{bmatrix}$ = أ س + ب ص حيث أ، ب ∈ ح فأوجد المصفوفتين س ، ص .

الحل :

نفرض مصفوفتين س = $\begin{bmatrix} \text{س}_2 & \text{س}_1 \\ \text{س}_4 & \text{س}_3 \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} \text{ص}_2 & \text{ص}_1 \\ \text{ص}_4 & \text{ص}_3 \end{bmatrix}$

أ $\begin{bmatrix} \text{س}_2 & \text{س}_1 \\ \text{س}_4 & \text{س}_3 \end{bmatrix}$ + ب $\begin{bmatrix} \text{ص}_2 & \text{ص}_1 \\ \text{ص}_4 & \text{ص}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} \end{bmatrix}$

أ س_1 + ب ص_1 = أ ⟵ $\text{س}_1 = 1$ ، $\text{ص}_1 = 0$

أ س_2 + ب ص_2 = - ب ⟵ $\text{ص}_2 = -1$ ، $\text{س}_2 = 0$

أ س_3 + ب ص_3 = ب ⟵ $\text{ص}_3 = 1$ ، $\text{س}_3 = 0$

أ س_4 + ب ص_4 = أ ⟵ $\text{س}_4 = 1$ ، $\text{ص}_4 = 0$

∴ س = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6- أوجد ما تساويه كل المصفوفات الآتية $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\text{ن}}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}^{\text{ن}}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ 0 & \text{ب} \end{bmatrix}^{\text{ن}}$

الحل :

لاحظ ان $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ ب} & \text{أ}^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ ب} & \text{أ}^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ}^2\text{ب} & \text{أ}^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\text{ن}} = \begin{bmatrix} \text{أ}^{\text{ن}-1}\text{ب} & \text{أ}^{\text{ن}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بالمثل $\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ}^2 \\ \text{ب}^2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ}^2 \\ \text{ب}^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ}^3 \\ \text{ب}^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}^{\text{ن}} = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ}^{\text{ن}} \\ \text{ب}^{\text{ن}} & 0 \end{bmatrix}$$

وكذلك ، $\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ 0 & \text{ب} \end{bmatrix}^{\text{ن}} = \begin{bmatrix} 0 & \text{أ}^{\text{ن}} \\ 0 & \text{أ}^{\text{ن}-1}\text{ب} \end{bmatrix}$

7-إذا كان: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة $\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix}$

الحل :

$$\begin{bmatrix} \text{ص} & \text{س} \\ \text{ل} & \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

محورة المصفوفة :- Transpse of a Matrix

إذا كانت ف مصفوفة فإن $ف^{/}$ هي محورتها

حيث $ف^{/}$ هي تبديل الأعمدة بالصفوف و الصفوف بالأعمدة

فمثلاً

$أ = \begin{bmatrix} 5 & 1 & أ \\ 0 & 2 & ب \\ 5 & 3 & جـ \end{bmatrix}$ فإن محورتها $أ^{/} = \begin{bmatrix} جـ & ب & أ \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$ب = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ فإن محورتها $ب^{/} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

لاحظ ان

(i) $\left(أ^{/}\right)^{/} = أ$

(ii) $\left(أ + ب\right)^{/} = أ^{/} + ب^{/}$

(iii) $\left(أ ب\right)^{/} = ب^{/} أ^{/}$

مثال :

إذا كان $ل = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $م = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ حل المعادلة $س^{/} + 2 ل^{/} = م$

الحل :

$س^{/} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \longleftarrow س^{/} + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$س^{/} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \longleftarrow س^{/} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -8 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$س = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$

12– المصفوفة المتماثلة (Symmetrical Matrix):

هي مصفوفة مربعة عناصرها متماثلة حول القطر الرئيسي بنفس الإشارة أي أن المصفوفة = محورتها ف = ف/

مثل :

$$ف = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -9 \\ 4 & 2 & 8 \\ -9 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

القطر الرئيسى

مثال (1) :

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} 5 & 2س & ص \\ 8 & 9 & 16 \\ 2ع + 1 & 4ع & 3 \end{bmatrix}$ أوجد قيم س ، ص ، ع التي تجعل المصفوفة أ متماثلة .

الحل :

$2س = 8 \Longleftarrow س = 4$ ، $4ع = 16 \Longleftarrow ع = 4$ ، $2ع + 1 = ص \Longleftarrow ص = 9$

مثال (2) :

إذا كانت المصفوفة $ب = \begin{bmatrix} 4 & س^2 - 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ متماثلة .

أوجد قيمة س .

الحل :

$س^2 - 1 = 3 \Longleftarrow س^2 = 4$

$س = \pm 2$

مثال (3) :

إذا كانت المصفوفة $جـ = \begin{bmatrix} 4 & س^2 - 1 \\ س + 5 & 8 \end{bmatrix}$

متماثلة . أوجد قيمة س .

الحل : $س^2 - 1 = س + 5$

$س^2 - س - 6 = 0$

$(س - 3) (س + 2) = 0$

$س = \{ 3 , -2 \}$

تمرين :

(1) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} 1 & 3س & ص \\ 15 & 3 & 20 \\ 2ع - 5 & 4ع & 5 \end{bmatrix}$ أوجد قيم س ، ص ، ع التي تجعل المصفوفة أ متماثلة .

(2) إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} 3 & س^2 - 6 \\ س & 7 \end{bmatrix}$ متماثلة . أوجد قيمة س .

13– المصفوفة ملتوية التماثل " عكسية التماثل " (Skew Symmetric Matrix):

هي مصفوفة مربعة قطرها الرئيسي أصفار وباقي عناصرها متماثلة حول القطر الرئيسي بعكس الإشارة أي أن المصفوفة = ـ محورتها ف = ـ ف/

مثل :

ف = $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

مثال (3) :

أوجد قيم أ ، ب ، جـ ، د التي تجعل المصفوفة التالية ملتوية التماثل .

$\begin{bmatrix} أ - ب & 3 & جـ + د \\ أ & 0 & د - ب \\ 8 & -6 & ب + د \end{bmatrix}$

الحل :

أ = - 3 ، أ - ب = 0 ⟵ ب = - 3

د – ب = 6 ⟵ د = 6 - 3 ⟵ د = 3

جـ + د = - 8 ⟵ جـ = – 8 – 3 = – 11 ⟵ جـ = – 11

أ = - 3 ، ب = - 3 ، جـ = – 11 ، د = 3

تذكر أن

في المصفوفة ملتوية التماثل تكون العناصر متماثلة حول القطر الرئيسي الذي يتكون من أصفار ولكن بتغير إشارة العناصر.

ضع في ذاكرتك دائما

إذا كانت أ أية مصفوفة مربعة فإن :

1- (أ + أ/) مصفوفة متماثلة " مصفوفة + محورتها = مصفوفة متماثلة " كذلك (أ × أ/) مصفوفة متماثلة

2- (أ - أ/) مصفوفة ملتوية التماثل " مصفوفة - محورتها = مصفوفة ملتوية التماثل "

3- $\frac{1}{2}$ [(أ + أ/) + (أ − أ/)] = أ

تمرين 1 -ج:

1- أوجد قيم أ ، ب ، جـ التي تجعل المصفوفة ف متماثلة .

حيث: ف = $\begin{bmatrix} 2جـ & 8 & 8 \\ ب - 3 & 4 & أ \\ 2 & -2 & جـ + 1 \end{bmatrix}$

إذا كانت ف = $\begin{bmatrix} 3 & -ب^2 & 0 \\ -1 & 0 & ب + 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ملتوية التماثل فإن ب = ... ، ....

الحل :

المصفوفة متماثلة أي أن $أ = 8$

$ب - 3 = -2$ ⟵ $ب = 1$

$جـ + 1 = 2جـ$ ⟵ $جـ = 1$

المصفوفة ملتوية التماثل أي أن $ب + 2 = ب^2$

$ب^2 - ب - 2 = 0$

$(ب + 1)(ب - 2) = 0$ ∴ $ب = -1$ ، $ب = 2$

2- إذا كانت محورة المصفوفة $\begin{bmatrix} 4م - 1 & ل + 3 \\ 6هـ & 2 - ن \end{bmatrix}$

تساوي المعكوس الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 4م & 2 \\ 3ن & ل + 2 \end{bmatrix}$

أوجد قيمة كل من: ل ، م ، هـ ، ن

الحل :

محورة المصفوفة $\begin{bmatrix} 4م - 1 & ل + 3 \\ 6هـ & 2 - ن \end{bmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 - ن & ل + 3 \\ 6هـ & 4م - 1 \end{bmatrix}$

ومعكوس المصفوفة $\begin{bmatrix} 4م & 2 \\ 3ن & ل + 2 \end{bmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{bmatrix} -4م & -2 \\ -3ن & -(ل + 2) \end{bmatrix}$

$$∴ \begin{bmatrix} 2 - ن & ل + 3 \\ 6هـ & 4م - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4م & -2 \\ -3ن & -(ل + 2) \end{bmatrix}$$

$ل + 3 = -2$ **$ل = -5$**	$4م - 1 = -ل - 2$ $4م = 5 - 2 + 1$ **$م = 1$**	$2 - ن = -4م$ $2 - ن = -4$ **$ن = 6$**	$6هـ = -3ن$ $هـ = \frac{-18}{6} = -3$ **$هـ = -3$**

$ل = -5$ ، $م = 1$ ، $ن = 6$ ، $هـ = -3$

3- إذا كان حاصل ضرب المصفوفتين متماثلة، فما قيمة جـ ؟

$$\begin{bmatrix} 6 & 1+\text{جـ} & 1 \\ 4- & \text{جـ} & 2 \\ 2- & 1 & \text{جـ} \end{bmatrix} \text{ ، } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & \text{جـ} & 4 \\ 2- & 4- & \text{جـ}2 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\begin{bmatrix} 8- & 4+\text{جـ}3 & \text{جـ}3+5 \\ \text{جـ}4-22 & 5+\text{جـ}4+{}^{2}\text{جـ} & \text{جـ}3+4 \\ 20+\text{جـ}12 & 2-\text{جـ}2-{}^{2}\text{جـ}2 & 8- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1+\text{جـ} & 1 \\ 4- & \text{جـ} & 2 \\ 2- & 1 & \text{جـ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & \text{جـ} & 4 \\ 2- & 4- & \text{جـ}2 \end{bmatrix}$$

من التماثل نجد ان $2\,\text{جـ}^2 - 2\,\text{جـ} - 2 = 22 - 4\,\text{جـ}$

$2\,\text{جـ}^2 + 2\,\text{جـ} - 24 = 0$ بالقسمة على 2 $\text{جـ}^2 + \text{جـ} - 12 = 0$

$(\text{جـ} - 3)(\text{جـ} + 4) = 0$ ⟵ **$\text{جـ} = 3$ ، $\text{جـ} = -4$**

4- إذا كانت

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1- \\ 4 & 7 & 5 \\ 0 & 6- & 8 \end{bmatrix} ، \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3- \\ 4 & 6- & 7- \\ 1- & 3 & 5 \end{bmatrix} ، \text{جـ} = \begin{bmatrix} \text{س} & 5 & 4- \\ 8 & \text{ص} & 2- \\ 1- & 3- & \text{ع} \end{bmatrix}$$

وكان أ + ب = جـ فأوجد قيم س، ص، ع . ثم اكتب المصفوفة جـ على صورة مجموع مصفوفتين إحداهما متماثلة والأخرى ملتوية التماثل.

الحل :

$$\begin{bmatrix} 4- & 5 & \text{س} \\ 2- & \text{ص} & 8 \\ \text{ع} & 3- & 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3- & 2 & 1 \\ 7- & 6- & 4 \\ 5 & 3 & 1- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \\ 8 & 6- & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4- & 5 & \text{س} \\ 2- & \text{ص} & 8 \\ \text{ع} & 3- & 1- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4- & 5 & 3 \\ 2- & 1 & 8 \\ 13 & 3- & 1- \end{bmatrix}$$

س = 3 ، ص = 1 ، ع = 13

$ج_1 = \frac{1}{2}(ج + ج')$

$ج_1 = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3 & 5 & -4\\ 8 & 1 & -2\\ -1 & -3 & 13\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 8 & -1\\ 5 & 1 & -3\\ -4 & -2 & 13\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}6 & 13 & -5\\ 13 & 2 & -5\\ -5 & -5 & 26\end{bmatrix}\right)$

مصفوفة متماثلة

$ج_2 = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3 & 5 & -4\\ 8 & 1 & -2\\ -1 & -3 & 13\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 8 & -1\\ 5 & 1 & -3\\ -4 & -2 & 13\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}0 & -3 & -3\\ 3 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}\right)$

مصفوفة ملتوية التماثل

$ج = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}6 & 13 & -5\\ 13 & 2 & -5\\ -5 & -5 & 26\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -3 & -3\\ 3 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}\right)$

5- إذا كانت $ل = \begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ، $م = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة: $12\,(م\,ل)' = |\,م\,ل\,|\,س'$ ، حيث س' محورة المصفوفة س .

الحل:

$12\,(م\,ل)' = |م\,ل|\,س'$

$12\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)' = \left|\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right|\,س'$

$12\left(\begin{pmatrix}6 & 3\\ -4 & 2\end{pmatrix}\right)' = 24\,س'$

$س' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & -4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

$س' = \begin{pmatrix}3 & -2\\ \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$

6- إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين على نفس النوع وكانت أ مصفوفة متماثلة ، وب مصفوفة ملتوية التماثل، فاثبت أن المصفوفة (أب + ب أ) ملتوية التماثل وأن المصفوفة أ^2 متماثلة.

الحل:

∵ أ مصفوفة متماثلة ∴ أ/ = أ

، ∵ ب مصفوفة ملتوية الثماثل ∴ ب/ = - ب

(أ ب + ب أ) ملتوية التماثل أي ان (أ ب + ب أ)/ = - (أ ب + ب أ)

(أ ب + ب أ)/ = (أ ب)/ + (ب أ)/

= ب/ أ/ + أ/ ب/

= - ب أ + أ (- ب)

حيث أ مصفوفة متماثلة ، ب مصفوفة ملتوية التماثل

= - (ب أ + أ ب)

= - (أ ب + ب أ)

(أ ب + ب أ) = - (أ ب + ب أ)/ أي ان (أ ب + ب أ) ملتوية التماثل

∵ أ مصفوفة متماثلة ∴ أ/ = أ وبتربيع الطرفين

∴ (أ^2)/ = أ^2

∴ المصفوفة أ^2 ملتوية التماثل

ملاحظة

بفرض ان أ ، ب مصفوفتين مربعتين من النوع ن × ن فإن:

(i) | أ ب | = | أ | | ب |

(ii) | ك أ | = ك^{ن} | أ | حيث ك ثابت

تمارين في المصفوفات :

1) اوجد المعكوس الجمعي للمصفوفة $\begin{bmatrix} هـ & -س & ن \\ -ص & م & ق \end{bmatrix}$

2) إذا كانت المصفوفة ا = $\begin{bmatrix} \frac{1-}{4} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1- & \frac{3}{2} & 2- \end{bmatrix}$ فأوجد 4ا

3) إذا كانت المصفوفة ا = $\begin{bmatrix} 3 & 2- & 1 \\ 0 & 5- & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد ا + ا/ وماذا تلاحظ

4) إذا كانت المصفوفة ا = $\begin{bmatrix} 3 & 2- & 1 \\ 0 & 5- & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد ا - ا/ وماذا تلاحظ

5) حل المعادلة 3 س + $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ = - 2 (س + $\begin{bmatrix} 6- & 3- \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$)

6) أوجد قيم ا ، ب ، جـ التي تجعل المصفوفة ف متماثلة حيث :

ف = $\begin{bmatrix} 2جـ & 3 & 2 \\ ب - 4 & 5- & ا \\ 1 & 3- & جـ + 3 \end{bmatrix}$

7) أوجد قيمة س ، ص ، ع التي تجعل المصفوفة ف ملتوية التماثل

ف = $\begin{bmatrix} ص + ع & 1- & س + ص \\ ص - 5 & 0 & س \\ ص + 1 & 6- & 8 \end{bmatrix}$

8) أوجد حاصل ضرب المصفوفتين ا ، ب حيث ا = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \\ 5- & 4- & 2- \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 1- & 2- & 3 \\ 1- & 1 & 4- \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9) إذا كانت $\begin{bmatrix} س & 2- & 1 \\ 5 & ص & 4- \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ع & 1 \\ 0 & 1- \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 2- & 1- \\ 4ن & 3ن \end{bmatrix}$ أوجد قيم س ، ص ، ع ، ن .

10) إذا كانت ا = $\begin{bmatrix} 2- & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 2- \end{bmatrix}$

I . أثبت أن (ا ب)/ = ب/ . ا/

II. أوجد 3ا – 2 ب

11) أوجد حاصل ضرب المصفوفات الأتية :

(ا) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2- & 1 \\ 6 & 3- \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1- & 2- & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} 3- & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5- & 6 & 2 \end{bmatrix}$

12) إذا كان $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2- & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة : $\begin{bmatrix} ص & س \\ ل & ع \end{bmatrix}$

13) إذا كانت ا = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1- \end{bmatrix}$ أوجد ا + ب ، ا - ب ثم أثبت أن :

I. (ا + ب)(ا - ب) ≠ $ا^2$ - $ب^2$

II. $(ا + ب)^2$ ≠ $ا^2$ + 2ا ب + $ب^2$

14) إذا كانت ا = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد $ا^2$

15) (ا) أوجد قيم ا ، ب ، جـ التي تجعل المصفوفة ف متماثلة حيث :

ف = $\begin{bmatrix} 2\text{جـ} & 8 & 8 \\ 3 - \text{ب} & 4 & \text{ا} \\ 2 & 2- & 1 + \text{جـ} \end{bmatrix}$

(ب) إذا كانت ف = $\begin{bmatrix} 3 & \text{ب}^2 - & 0 \\ 1- & 0 & 2 + \text{ب} \\ 0 & 1 & 3- \end{bmatrix}$ ملتوية التماثل فإن ب = ... ، .....

16) إذا كانت ا = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ أوجد $ا^ن$

ثم اوجد 2 $ا^2$ + ا + I_2

المحددات Determinants

ظهرت المحددات في البداية مرتبطة بحل المعادلات الخطية الآنية .

بحيث تكون فيها عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات حيث المحدد لابد ان يكون عدد الصفوف فيه مساوياً لعدد الأعمده

وتستخدم كذلك في إيجاد قيمة المصفوفة حيث لكل مصفوفة مربعة ﺃ يرافقها محدد ويرمز له بالرمز | ﺃ |

فمثلاً المصفوفة ﺃ = $\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} \end{bmatrix}$ يرافقها المحدد $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} \end{vmatrix}$

والمصفوفة ق = $\begin{bmatrix} \text{س} & \text{ل} & \text{ك} \\ \text{ص} & \text{م} & \text{ى} \\ \text{ع} & \text{ن} & \text{ف} \end{bmatrix}$ يرافقها المحدد $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ل} & \text{ك} \\ \text{ص} & \text{م} & \text{ى} \\ \text{ع} & \text{ن} & \text{ف} \end{vmatrix}$

قيمة المحدد :-

يرمز إلى قيمة المحدد بالرمز Δ (دلتا)

أولاً : محدد الرتبة الثانية :

Δ = $\begin{vmatrix} \text{ﺃ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix}$ = ﺃ د – ب جـ

القطر الفرعي   القطر الرئيسي

أي أن Δ = **حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي – حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي**

مثال(1):-

قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1- & 3 \end{vmatrix}$ = 6 – (-1) = 7

مثال(2):-

إذا كانت $\begin{vmatrix} 2 & 1- \\ 4 & \text{س} \end{vmatrix}$ = 10 فأوجد قيمة س

الحل:-

2 س – (-4) = 10

2 س + 4 = 10 ← 2 س = 10 – 4

س = 3

مثال(3) :-

إذا كانت $\begin{vmatrix} 2\text{س} & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 6$ فإن س = ...

الحل:-

- 6 س – 24 = 6 ← - 6 س = 30 ∴ س = - 5

مثال (4) :-

حل المعادلات الأتية :

(i) $\begin{vmatrix} \text{س} & -1 \\ 2 & \text{س} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$

(ii) $\begin{vmatrix} \text{س} & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

الحل :

(i) (س^2 + 2) + (س - 6) = 2 ⟸ س^2 + س – 6 = 0

(س + 3)(س – 2) = 0

مجموعة الحل { - 3 ، 2 }

(ii) 2 س + 15 = - س + 3 ⟸ 3 س = - 12

س = - 4 مجموعة الحل هي: { – 4 }

مثال (5) :-

حل المعادلة : $\begin{vmatrix} 3\text{س} & -4 \\ 2 & 2-\text{س} \end{vmatrix} = -1$

الحل :

6 س – 3 س^2 + 8 = - 1

3 س^2 - 6 س – 9 = 0 بالقسمة على 3

س^2 - 2 س – 3 = 0 ⟸ (س – 3)(س + 1) = 0

مجموعة الحل { 3 ، - 1 }

ثانياً : محدد الرتبة الثالثة :

(أ) طريقة المحددات الصغرى المرافقة:-

ويراعي فيها قاعدة الإشارات $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

حيث المحدد المرافق لأي عنصر نحصل عليه بعد حذف عناصر الصف والعمود المشتمل على هذا العنصر ففي محدد الرتبة الثالثة $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ل} & \text{ك} \\ \text{ص} & \text{م} & \text{ى} \\ \text{ع} & \text{ن} & \text{ف} \end{vmatrix}$ نجد أن

المحدد المرافق للعنصر س هو $\begin{vmatrix} \text{م} & \text{ى} \\ \text{ن} & \text{ف} \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} \text{م} & \text{ى} \\ \text{ن} & \text{ف} \end{vmatrix}$

والمحدد المرافق للعنصر ص هو $\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ك} \\ \text{ن} & \text{ف} \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ك} \\ \text{ن} & \text{ف} \end{vmatrix}$ وهكذا

وقيمة المحدد تساوي "مجموع حاصل ضرب عناصر أي صف أو أي عمود في قيمة المحددات الصغرى المرافقة لها في الإشارات المناظرة لها في قاعدة الإشارات" .

مثال(1):-

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

الحل :-

عن طريق الصف الأول

$$\Delta = (2)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2\,(13) - 3\,(10) - (4)$$

$$= 26 - 30 - 4 = -8$$

عن طريق العمود الأول

$$\Delta = (2)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2\,(13) - 0\,(11) - 2\,(17)$$

$$= 26 - 34 = -8$$

ملاحظة : يمكن إيجاد قيمة المحدد عن طريق فك أي صف أو عمود مع مراعاة قاعدة الإشارات .

مثال(2):-

أثبت أن المعادلة $\begin{vmatrix} 1 & \text{ص} & \text{س} \\ 1 & 2 & 1- \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ تمثل خطا مستقيما يمر بالنقطتين (1 ، 0) ، (-1 ، 2)

الحل :-

بفك المحدد عن طريق الصف الأول :

$\text{س} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \text{ص} \begin{vmatrix} 1 & 1- \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1- \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

س (2 – 0) – ص (-1 – 1) + (0 – 2) = 0

2 س + 2 ص – 2 = 0 بالقسمة على 2

س + ص – 1 = 0

و هذه المعادلة هي معادلة خط مستقيم ومن الواضح أن النقطتين (1 ، 0) ، (-1 ، 2) تحققان المعادلة .

(ب) طريقة الأقطار:-

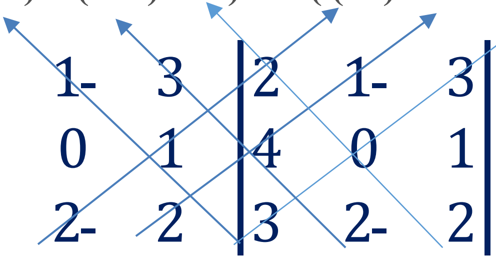
وذلك بتكرار كتابة العمود الأول والعمود الثاني .

مثال(3) :-

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 1- & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2- & 2 \end{vmatrix}$

الحل :-

15 = (27-) – 12 - = ((3 -) + (24 -) + 0) - ((4 -) + 8 - + 0) = Δ



Δ = [مجموع حواصل ضرب الأقطار الرئيسية] - [مجموع حواصل ضرب الأقطار الفرعية]

= (-12) – (-27) = -12 + 27 = 15

حالات خاصة :-

إذا كان المحدد في الصورة المثلثية

(1) $\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ هـ & د & 0 \\ و & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = أ د و **حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي** (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & أ \\ 0 & جـ & ب \\ و & هـ & د \end{vmatrix}$ = أ جـ و

وتسمي الصورة المثلثية السفلى والعليا .

مثال (4) :-

(i) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 8 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -21$ (ii) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 30$

(3) $\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ 0 & هـ & د \\ 0 & 0 & و \end{vmatrix}$ = - جـ هـ و **- حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي** (4) $\begin{vmatrix} أ & 0 & 0 \\ ب & هـ & 0 \\ جـ & د & و \end{vmatrix}$ = - أ هـ و

مثال (5) :-

(i) $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -24$ (ii) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

بعض خواص المحددات :-

(1) محدد المصفوفة أ يساوي محدد محورتها | أ | = | أ$^{/}$ |

$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 8 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ أي أن $\Delta = \Delta^{/}$

(2) تتغير إشارة المحدد إذا بادلنا صفين أو عمودين

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ بدلنا ص$_1$ ، ص$_2$

(3) إذا ضرب عدد في محدد فإنه يضرب في صف واحد أو عمود واحد والعكس إذا أخذ عامل مشترك يؤخذ من صف واحد أو عمود واحد .

$2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}$

إذا ضرب عناصر صف أو عمود في عدد ثابت ك فإن قيمة المحدد الجديدة ك × قيمة المحدد" ك × ∆ "

(4) ينعدم المحدد ($\Delta = 0$) في الحالات الآتية

i. إذا كان أحد الأعمدة أو الصفوف أصفار
ii. إذا تساوى صفان أو عمودان
iii. إذا وجد تناسب بين صفين أو عمودين
iv. وجد صف يساوي مجموع الصفين الآخرين أو عمود يساوي مجموع العمودين الآخرين .

مثال (6) :

- $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & ك+3 \end{vmatrix} = 0$ فإن ك = ...

الحل :- $ص_1 = ص_3 \Leftarrow ك + 3 = 3$

$\therefore$ ك $= 3 - 3 = 0$

- $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ س & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ فإن س = ...

الحل :- يوجد تناسب بين $ص_1$ ، $ص_3$ $\Leftarrow \frac{2}{1} = \frac{8}{س}$ $\boxed{\therefore س = 4}$

(5) إذا أحتوي أي صف أو عمود علي مجموع جبري عدده ن فإنه هناك ن من المحددات

$$\begin{vmatrix} ك+جـ & ل+ب & س+أ \\ ى & م & ص \\ ف & ن & ع \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ ى & م & ص \\ ف & ن & ع \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ك & ل & س \\ ى & م & ص \\ ف & ن & ع \end{vmatrix}$$

مثال (7) :

إذا كان $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & س & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & ص & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & ع \\ 6 & 8 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ فإن ع = 7 ، ص = 2 ، س = 5

(6) قيمة المحدد لا تتغير إذا أضفنا إلى عناصر أى صف أو عمود مضاعفات الصفوف أو الأعمدة الأخرى .

مثال (8):

$$\begin{vmatrix} ك & ل & س \\ ى & م & ص \\ ف & ن & ع \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ك & ل & س \\ ى + 5ك & م + 5ل & ص + 5س \\ ف - 3ك & ن - 3ل & ع - 3س \end{vmatrix}$$

$ص_2 = ص_2 + 5\,ص_1$ ، $ص_3 = ص_3 - 3\,ص_1$

مثال (9):

بدون فك أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{ص + ع} & \text{س} & 3 \\ \text{س + ع} & \text{ص} & 3 \\ \text{س + ص} & \text{ع} & 3 \end{vmatrix} = 0$$

الحل

$ع_3 = ع_3 + ع_2$ ∴ المحدد =

$$\begin{vmatrix} \text{س + ص + ع} & \text{س} & 3 \\ \text{س + ص + ع} & \text{ص} & 3 \\ \text{س + ص + ع} & \text{ع} & 3 \end{vmatrix} = 3\,(\text{س + ص + ع}) \begin{vmatrix} 1 & \text{س} & 1 \\ 1 & \text{ص} & 1 \\ 1 & \text{ع} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

لأن $ع_1 = ع_3$

مثال (10) :

إذا كان $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{vmatrix} = 5$ فأوجد $\begin{vmatrix} \text{3ب} & \text{2أ} \\ \text{3د} & \text{2جـ} \end{vmatrix}$

الحل :

$$\begin{vmatrix} \text{3ب} & \text{2أ} \\ \text{3د} & \text{2جـ} \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

$$= -6 \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix} = -6 \times 5 = -30$$

مثال (11) :

إذا كان $\begin{vmatrix} 12 & 9 & 7 \\ 4 & \text{ن} & 5 \\ 3 & 10 & \text{هـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 10 & 8 & \text{ع} \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix}$ اوجد كل من ع ، ن ، هـ

∵ $\Delta = \Delta^{/}$

∴ ع = 9 ، ن = 8 ، هـ = 2

□ تمرين 1-أ

1- أوجد قيمة المحددات الآتية:

$$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 6 & 3- & 2 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \text{ب} \qquad \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4- & 5 \end{vmatrix} = \text{أ}$$

الحل :

$$(5 \times 2) - (4- \times 3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = \Delta \ (\text{أ})$$

$$22- = 10 - 12- =$$

(ب) عن طريق الصف الأول

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} (9) + \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} (5) - \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} (4) = \Delta$$

$$(26)\ 9 + (40-)\ 5 - (18-)\ 4 = \Delta$$

$$362 = 234 + 200 + 72- =$$

2- بدون فك المحددات أوجد قيمة المحددات الأتية:

$$\begin{vmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 5 & 1- & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \text{ب} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2- \\ 0 & 3- & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{أ}$$

$$\begin{vmatrix} 3- & 2 & 5 \\ 4- & 10- & 6- \\ 6 & 4 & 2- \end{vmatrix} = \text{د} \qquad \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{ص} & 2\text{س} \\ 6 & 3\text{ن} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \text{جـ}$$

الحل :-

$$24 = (4 \times 3- \times 2-) = |\text{أ}| \Longleftarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{أ}$$

لوجود تناسب بين الصفين الأول والثالث $\Delta = 0 \Longleftarrow \begin{vmatrix} 9 & 12 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \text{ب}$

لوجود صف كله اصفار وهو الصف الثالث $\Delta = 0 \Longleftarrow \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{ص} & 2\text{س} \\ 6 & 3\text{ن} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \text{جـ}$

لأن $\text{ع}_1 + \text{ع}_3 = \text{ع}_2$ $\Delta = 0 \Longleftarrow \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -4 & -10 & -6 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \text{د}$

3- أوجد قيمة المجهول في كلا مما يأتي الآتية:

(i) $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & س & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 5 & 9 & 1 \\ 3 & ص & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & ع \\ 6 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & ن \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$

الحل:-

(i) $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 1 & س & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 5 & 9 & 1 \\ 3 & ص & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & ع \\ 6 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

س = - 8 ، ص = - 3 ، ع = 1

(ii) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & ن \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$ص_1 + ص_2 = ص_3$ ن + (- 2) = 5 ⟸ **ن = 7**

4 - باستخدام خواص المحددات أثبت أن: $\begin{vmatrix} أ - ص & أ + ص & س \\ ب - ص & ب + ص & س \\ جـ - ص & جـ + ص & س \end{vmatrix} = 0$

الحل:-

العمود الثاني يساوي العمود الثاني – العمود الأول

$\begin{vmatrix} أ - ص & 2ص & س \\ ب - ص & 2ص & س \\ جـ - ص & 2ص & س \end{vmatrix}$ بأخذ س عامل مشترك من العمود الثالث و 2 ص من العمود الثاني

$2\,س\,ص \begin{vmatrix} أ - ص & 1 & 1 \\ ب - ص & 1 & 1 \\ جـ - ص & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ من تساوي عمودين " العمود الثاني والعمود الثالث "

5 - أوجد قيم س التي تجعل:

(i) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & س \\ س & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & س \end{vmatrix} = 26$

(iii) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 3س+1 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ (iv) $\begin{vmatrix} 1 & س & س^2 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

الحل:-

(i) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & س \\ س & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10$

$-س(-2-س)+2(-3-4س)=10$

$2س+س^2-6-8س=10$

$س^2-6س-16=0$

$(س+2)(س-8)=0 \longrightarrow$ **$س=-2$ ، $س=8$**

(ii) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & س \end{vmatrix} = 26$

$2(-3س+4)-(-س-20)+3(1+15)=26$

$-6س+8+س+20+3+45-26=0$

$5س=50 \longrightarrow$ **$س=10$**

(iii) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3س+1 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$ع_1 = ع_3$ عندما $3س+1=4$

$3س+1=4$

$3س=3 \longrightarrow$ **$س=1$**

(iv) $\begin{vmatrix} 1 & س & س^2 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$ص_1 = ص_2$ عندما **$س=-3$**

$ص_1 = ص_3$ عندما **$س=2$**

تمارين في المحددات :-

1- بدون فك المحدد أثبت أن (أ) $\begin{vmatrix} 4 & 2\text{ب} & 5\text{أ} - 3\text{جـ} \\ 4 & -3\text{جـ} & 2\text{ب} + 5\text{أ} \\ 4 & 5\text{أ} & 2\text{ب} - 3\text{جـ} \end{vmatrix} = 0$ ، (ب) $\begin{vmatrix} 5 & \text{س} & \text{ص} + \text{ع} \\ 5 & \text{ص} & \text{س} + \text{ع} \\ 5 & \text{ع} & \text{س} + \text{ص} \end{vmatrix} = 0$

2- إذا كان $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & \text{جـ} \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & \text{س} \\ -1 & 7 & 8 \\ 5 & 12 & 9 \end{vmatrix}$ فأوجد قيمة كل من جـ ، س

3- أثبت أن $\begin{vmatrix} \text{ص ع} & \text{س} & \text{س}^2 \\ \text{س ع} & \text{ص} & \text{ص}^2 \\ \text{س ص} & \text{ع} & \text{ع}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{س}^2 & \text{س}^3 \\ 1 & \text{ص}^2 & \text{ص}^3 \\ 1 & \text{ع}^2 & \text{ع}^3 \end{vmatrix}$

4- بدون فك المحدد أوجد قيمة س $\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{س}^2 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

5- حل المعادلة $\begin{vmatrix} \text{س} + 1 & -5 \\ 1 & \text{س} - 1 \end{vmatrix} = 13$

6- أوجد قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} 0 & -1 & \text{س} \\ \text{س} & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10$

7- حل المعادلة $\begin{vmatrix} 2\text{جاهـ} & 1 & -1 \\ 1 & 2\text{جا هـ} & -1 \\ 1 & -1 & 2\text{جاهـ} \end{vmatrix} = 0$ ، $0 < \text{هـ} < 180$

8- إذا كان $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & \text{س} \end{vmatrix} = 7$ فإن قيمة س = ...

9- قيمة $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 12 & 4 & 0 \\ 1- & 0 & 0 \end{vmatrix}$ هي ....

10- قيمة $\begin{vmatrix} 1- & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1- & 2- \end{vmatrix}$ = ...

11- إذا كان $\begin{vmatrix} 5\,\text{س} & \text{س} + 1 & \text{س}^2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 15 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$ فإن قيمة س تساوي ....

12- أوجد قيمة ﻫ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} - & 3\,\text{س} \\ 5\,\text{س} & 2\,\text{س} \end{vmatrix} = \text{ﻫ}\ \text{س}^2$